

## **CHAPITRE 2**

# **L'ORDONNANCEMENT DE PROJET**

### **1 Introduction**

Le domaine de l'ordonnancement présente la particularité de se situer à la croisée de plusieurs disciplines scientifiques (mathématiques, économie, productique, automatique, informatique,...). L'ordonnancement dans projet est également d'une très forte relation entre pratique et théorie. Nous présentons tout d'abord ce qu'est un projet et ces caractéristiques et la gestion du projet ensuite en présentant l'ordonnancement du projet et enfin le problème d'ordonnancement et sa résolution.

### **2 Le Projet**

#### **2.1 Définition d'un projet**

Le projet est un ensemble d'étapes et d'activités coordonnées ayant pour but de répondre à un besoin exprimé par un client dans un délai imparti et avec un coût estimé au préalable. Selon l'Afnor (norme X50-105) un projet est défini comme « une démarche spécifique qui permet de structurer méthodiquement et progressivement une réalité. Un projet est défini et mis en œuvre pour élaborer une réponse au besoin d'un utilisateur, d'un client ou d'une clientèle et il implique un objectif et des actions à entreprendre avec des ressources données »

Un projet est donc caractérisé par des objectifs, un délai, un coût à respecter avec une mobilisation de moyens et d'acteurs divers. D'après ISO 03 :

« un projet est un processus unique, qui consiste en un ensemble d'activités coordonnées et maîtrisées, comportant des dates de début et de fin, entrepris dans le but d'atteindre un objectif conforme à des exigences spécifiques telles que des contraintes de délai, de coût et de ressources »

Un projet est caractérisé par un ou plusieurs objectifs qui traduisent l'expression du besoin, un ensemble d'acteurs et de partenaires amenés à interagir entre eux tout au long du cycle de

vie du projet, des moyens techniques et financiers et des contraintes techniques, financières, environnementales, sociales et temporelles. La notion de projet est intimement liée à la notion d'investir. La réalisation d'un projet s'accompagne dans la majorité des cas d'un investissement. Par investissement nous désignons toute opération qui consiste à engager des dépenses dans le présent en espérant des gains financier futurs. [6]

## **2.2 Caractéristiques des projets réussis**

Un projet réussi possède les particularités suivantes :

- des objectifs précis : Objectifs définis clairement dès le départ.
- Un plan de projet bien établi : Un plan conçu avec minutie qui permet à chaque participant de comprendre et de contribuer au projet. Il précise les responsabilités de chacun et évalue combien d'argent, de personnes, de matériel et de temps sont nécessaires à l'achèvement du projet. Ensuite, il sert d'outil de suivi et permet d'adopter des mesures correctives tôt dans le processus si les choses tournent mal.
- La communication : Le projet repose sur la collaboration et la communication entre toutes les personnes qui y prennent part.
- Une envergure maîtrisée : Tout au long du projet, il importe de porter attention aux priorités, avec une perte minimale de temps et de concentration.
- Le soutien des intervenants : Il importe que toutes les parties prenantes accordent leur soutien pour toute la durée du projet de façon à atteindre les objectifs. [11]

## **2.3 Acteurs du projet**

Selon la complexité et les enjeux du projet, il peut comporter un nombre important d'acteurs. Nous proposons une distinction entre ces acteurs à partir de leur participation dans le projet et leurs missions. De façon générale, on distingue deux types d'acteurs :

### **✓ La maîtrise d'ouvrage (MOA)**

C'est l'initiateur du projet et celui qui le commande, il n'étudie pas le projet, mais par contre il doit en connaître les fonctions, les objectifs. Il définit donc le programme. Le maître de l'ouvrage définit dans le programme les objectifs de l'opération et les besoins qu'elle doit satisfaire, ainsi que les contraintes et exigences de qualité sociale, urbanistique, architecturale,

fonctionnelle, technique et économique, d'insertion dans le paysage et de protection de l'environnement, relatives à la réalisation et à l'utilisation de l'ouvrage.[ 31]

✓ La maîtrise d'œuvre (MOE)

C'est l'entité qui étudie le projet sur la base du programme et se charge de sa mise en oeuvre. Lorsqu'il s'agit de travaux, la maîtrise d'oeuvre prend en charge le contrôle de l'exécution des travaux. La mission de maîtrise consiste à apporter une réponse architecturale, technique et économique au programme.

Le programme est une prérogative de la maîtrise d'ouvrage. Les maîtres d'oeuvre n'ont donc pas à élaborer ni modifier le programme, qui n'entre pas dans leur domaine d'intervention.[31]

### **2.3 Cycle de vie d'un projet**

Chaque projet à un cycle de vie composé d'étapes à franchir du début à la fin.

- 1- Avant-projet.
- 2- Élaboration du concept.
- 3- Planification.
- 4- Réalisation.
- 5- Clôture.

Les différentes phases du cycle de vie d'un projet sont :

- Avant-projet:
  - Identifier le problème.
  - Comprendre les besoins et les objectifs.
  - Évaluer la faisabilité.
  - A l'issue de cette phase :Autoriser ou pas le projet.
- Élaboration du concept:
  - Entamer une réflexion globale sur le projet.
  - Ajuster les orientations globales.
  - Définir les objectifs majeurs.
  - Identifier les ressources nécessaires.
  - A l'issue de cette phase :Désigner le chef de projet.

- Planification
  - Définir le périmètre du projet
  - Raffiner les objectifs
  - Découper le projet en tâches élémentaires.
  - Ordonnancer ces tâches.
  - Identifier les acteurs, les délais et le financement.
  - Planifier la communication.
  - Identifier les risques et les solutions alternatives.
  - A l'issue de cette phase :Plan de management.
- Réalisation
  - Exécuter le plan de management
  - Veiller au bon déroulement du projet
  - Coordonner les ressources, les équipes
  - Communiquer
  - Gérer les aléas
  - Effectuer des tests et garantir la qualité
  - A l'issue de cette phase: Le produit final
- Clôture
  - Mener les activités en bonne fin.
  - Clôturer les contrats.
  - Former les utilisateurs.
  - Bilan du projet (expérience, points forts/faibles).
  - A l'issue de cette phase :Déploiement.[4]

### 2.3.1 La planification du projet

#### a. Consistance

La planification d'un projet consiste à :

1. Découper le projet en phases.
2. Découper les phases en tâches.
3. Définir la logique d'enchaînement des tâches.
4. Analyser les résultats (délai final, chemin critique, les marges,...)
5. Optimiser le planning, en changeant certains enchaînements logiques et/ou en modifiant la durée de certaines tâches.
6. Editer le planning sous une forme temporelle claire et bien adaptée aux divers utilisateurs.

#### b. Objectifs

Les objectifs principaux de la planification des projets sont les suivants:

- minimiser la durée d'exécution totale du projet,
- minimiser le coût total du projet,
- gestion optimale des ressources. [14]

### 2.3.2 Les éléments du plan

Puisqu'il n'y a pas deux projets pareils, il n'existe pas non plus deux plans de projet qui soient identiques. Pour qu'il soit d'une utilité maximum, votre plan de projet doit être pertinent, compréhensible et tenir compte de l'importance et de la complexité de votre projet unique.

Votre plan de projet devrait inclure les éléments suivants :

1. le mandat de projet;
2. le calendrier d'activités;
3. l'horaire de travail;
4. la matrice de responsabilités;
5. le budget de plan de projet;
6. les étapes importantes, avec les dates cibles;
7. la stratégie de gestion du risque. [20]

### 2.3.2 Le calendrier d'activités

Le calendrier d'activités est l'un des éléments les plus importants du coffre à outils du gestionnaire de projet. En permettant de fractionner un projet et de répartir toutes les tâches nécessaires à son achèvement, il :

- offre une vision précise de l'envergure du projet.
- permet de savoir précisément ce qui est terminé et ce qui reste à faire.
- permet de suivre de près le travail, les échéances et les coûts associés à chaque tâche.
- permet de confier la responsabilité de tâches précises aux membres de l'équipe.
- permet aux membres de l'équipe de comprendre leur rôle dans l'ensemble du tableau.

[20]

### 2.3.3 Création d'un calendrier d'activités

Le plan d'action mis au point dans le cadre d'une demande de financement au BTA fractionne le projet en ses activités composantes. Pour la phase initiale, la description des activités se fait sur une base mensuelle. Pour la phase pilote, elles sont présentées sur une base trimestrielle. Les activités décrites dans votre plan d'action peuvent être considérées comme des tâches sommaires. Certaines sont suffisamment restreintes pour être gérées telles quelles, d'autres doivent être fractionnées de nouveau en éléments logiques.

Ces éléments de travail plus restreints, les tâches, seront confiés à des personnes et doivent être définis avec assez de précision pour permettre le suivi et la gestion du rendement sans toutefois être restreintes au point d'obliger à consacrer un temps indu aux détails. À titre indicatif, il n'est pas utile de définir des tâches qui nécessitent moins d'une demi-journée de travail durant le cycle de vie du projet. [20]

## 3 La gestion de projet

La conduite de projet traduit l'ensemble des activités d'organisation, de gestion, de coordination et de pilotage d'un projet. Elle requiert la mise en place d'une équipe projet.

La gestion de projet aura donc pour but de fournir à l'équipe projet les outils nécessaires de prise de décision afin de réaliser le projet en respectant les contraintes de coût, de qualité et de délai. La qualité traduit le degré de réponse apporté par le projet au besoin exprimé au départ, un projet doit satisfaire le ou les besoins exprimés. La qualité renvoie également à la notion de performance et de fiabilité. [6]

### **3.1 Définition**

Selon l'AFNOR1, « la gestion de projet est l'ensemble des méthodes, outils d'évaluation, de planification et d'organisation permettant d'atteindre les objectifs du projet en respectant les contraintes de performance, de délai, et de coût.[6]

## **4 L'ordonnancement dans la gestion de projet**

Consiste à programmer les tâches d'un projet et leur exécution et s'assurer de la disponibilité des ressources nécessaires à leur réalisation en respectant les contraintes de délai, de performance et de coût ainsi que les objectifs préalablement établis.

L'ordonnancement cherche à optimiser plusieurs critères, on peut distinguer deux familles de critères, d'abord le délai de réalisation du projet, en le réduisant le plus possible, la seconde famille est l'utilisation de la ressources et la réduisant et en évitant le conflit sur ressources pouvant se produire en assurant un lissage des ressources tout au long du projet.[6]

## **5 Le problème central de l'ordonnancement**

Le problème d'ordonnancement consiste à organiser dans le temps la réalisation d'un ensemble de tâches, compte tenu de contraintes temporelles (délais, contraintes d'enchaînements,...) et de contraintes portant sur l'utilisation et la disponibilité des ressources requises.

Dans notre travail on ne tient compte que des contraintes de potentiels qui sont d'antériorité et de durée. Les contraintes disjonctives et cumulatives sont ignorées. Les ressources sont supposées à quantité illimitée.

### **5.1 Modélisation du problème central**

Il existe actuellement trois méthodes de modélisation du problème central : le diagramme de Gantt, la méthode des potentiels et la méthode PERT/CPM. Ces deux dernières utilisent comme outil de modélisation la théorie des graphes ; et plus particulièrement le réseau.

On note que dans la table initiale des données, les tâches A et B n'ont aucune antériorité (les tirets de la dernière colonne) et que les tâches I et J n'ont aucune postériorité (I et J n'apparaissent pas en dernière colonne).

Pour les besoins algorithmiques, on complète cette table par une tâche  $\alpha$  (appelée source ou racine) de durée 0 précédant A et B et une tâche  $\omega$  (appelée puits ou anti-racine) de durée 0 succédant à I et J. On déduit la deuxième table.

Nous définissons alors *un graphe conjonctif*  $G = (X, U, v)$  valué ayant une racine 0 et un puits  $n+1$  tel que :

- il existe un chemin de valeur positive entre la racine et tout autre sommet
- il existe un chemin de valeur positive entre tout sommet différent de puits et le puits.

Une condition nécessaire et suffisante pour appliquer l'une des méthodes de modélisation des problèmes d'ordonnancement sur un graphe conjonctif est que ce graphe n'ait pas de *circuit* et les valeurs sur les arcs (les  $t_i$ ) sont de valeurs positives ou nulles. De part la nature du problème, une tâche ne peut se succéder à elle-même, donc le graphe ne contient pas de boucles.[20]

### 5.1.1 Le diagramme de Gantt

La méthode de Gantt, est une méthode d'ordonnancement des tâches développée par Henry L. Gantt, ingénieur américain, vers 1910. Elle contient des informations de base sur les tâches présentées sous la forme de colonne et d'un graphe à barres. La plupart des personnes l'utilisent pour construire, consulter les prévisions et ajuster la planification du projet.

Principalement utilisé comme outil de communication majeur entre les différents acteurs impliqués dans la réalisation d'un projet, le diagramme de Gantt permet de :

- Déterminer la durée optimale nécessaire pour réaliser de bout en bout un projet ;
- Visualiser l'enchaînement des différentes tâches et étapes du projet ;
- Calculer les marges des différentes tâches du projet
- Identifier les tâches critiques (tâches pour lesquelles aucun retard ne sera toléré)
- Gérer au mieux l'utilisation des ressources ;
- Suivre au quotidien l'état d'avancement du projet ;

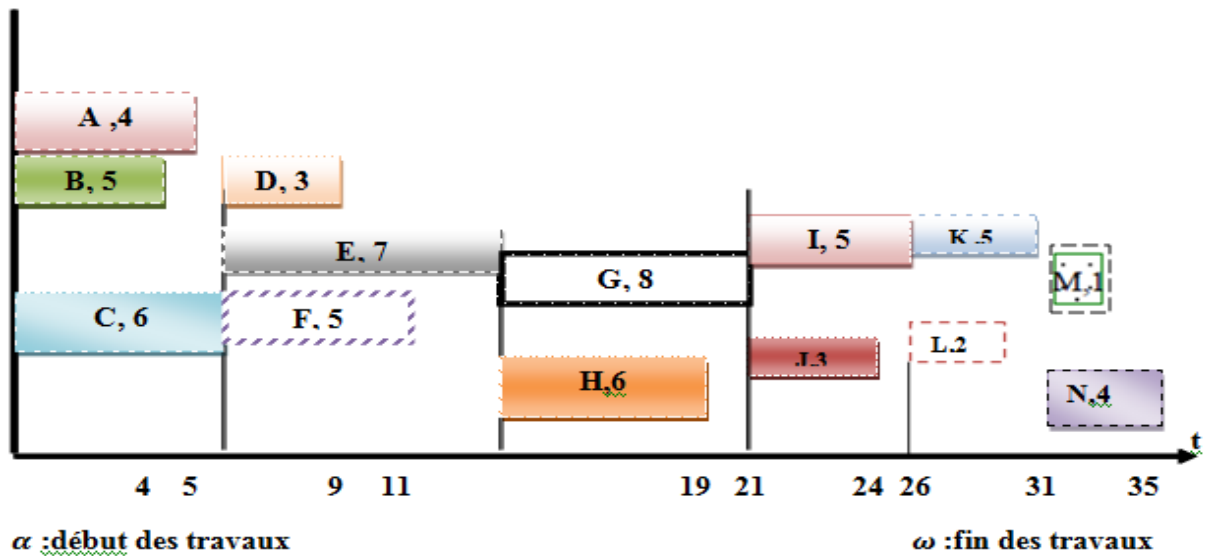


- Prévoir suffisamment à l'avance les actions correctives à entreprendre en cas de retard ou de dépassement des charges prévues.[10]

On a comme exemple le table d'ordonnancement suit :

<b>Code</b>	<b>Désignation</b>	<b>Durées</b>	<b>Antériorités immédiates</b>
<b>A</b>	<b>Etablissement des plans</b>	<b>4</b>	<b>-</b>
<b>B</b>	<b>Terrassement</b>	<b>5</b>	<b>-</b>
<b>C</b>	<b>Creuser les fonds de piliers</b>	<b>6</b>	<b>-</b>
<b>D</b>	<b>Faire les fonds de piliers</b>	<b>3</b>	<b>A, B, C</b>
<b>E</b>	<b>Placement arrivée et évacuation assainissement</b>	<b>7</b>	<b>A, B, C</b>
<b>F</b>	<b>Dalle</b>	<b>5</b>	<b>A, B, C</b>
<b>G</b>	<b>Cloisonnage</b>	<b>8</b>	<b>D, E</b>
<b>H</b>	<b>Carrelage</b>	<b>6</b>	<b>D, E</b>
<b>I</b>	<b>Plomberie</b>	<b>5</b>	<b>F</b>
<b>J</b>	<b>Installation chauffage</b>	<b>3</b>	<b>F</b>
<b>K</b>	<b>Electricité</b>	<b>5</b>	<b>G, H, I, J</b>
<b>L</b>	<b>Pose faïence</b>	<b>2</b>	<b>G, H, I, J</b>
<b>M</b>	<b>Boiserie</b>	<b>1</b>	<b>K, L</b>
<b>N</b>	<b>Peinture</b>	<b>4</b>	<b>K, L</b>

**Table 2.1** Table initiale d'ordonnancement



**Figure 2.1** Le diagramme de Gantt de la table T

### 5.1.2. Graphe de la méthode des potentiels

La Méthode des Potentiels et antécédents Métra (MPM) est une technique d'ordonnancement basée sur la théorie des graphes, visant à optimiser la planification des tâches d'un projet.

Elle aurait été mise au point en 1958 par un chercheur français, Bernard Roy, au sein de la société de conseil Métra, dans le cadre du projet de construction du paquebot "France".

La MPM tend, depuis les années 1980, à le supplanter. Cette méthode s'avère, en effet, beaucoup plus souple et mieux adaptée à une automatisation du traitement des données (notamment en terme de représentation graphique et d'algorithme de calcul)

L'utilisation de la MPM permet, notamment, de déterminer la durée minimum nécessaire pour mener à bien un projet et les dates auxquelles peuvent ou doivent débiter les différentes tâches nécessaires à sa réalisation pour que cette durée minimum soit respectée.

La méthode des potentiels Métra permet de représenter l'ensemble de ces tâches sur un graphe orienté, à partir duquel il sera possible d'identifier leurs dates au plus et au plus tard et de calculer leurs marges.

Un graphe orienté est un réseau composé d'une entrée et d'une sortie, ainsi que de points (appelés "sommets") reliés entre eux par des flèches (appelées "arcs").

Les principales conventions d'un réseau MPM sont les suivantes :

- chaque tâche est représentée par un sommet.
- les contraintes de succession sont symbolisées par les arcs.

- chaque tâche est renseignée sur sa durée ainsi que sur la date à laquelle elle peut commencer au plus tôt ("date au plus tôt") et au plus tard ("date au plus tard") pour respecter le délai optimal de réalisation du projet. le graphe commence et termine sur 2 sommets, respectivement appelés "Début" et "Fin" symbolisant les début et fin des opérations (mais ne correspondant pas une tâche).

➤ construction d'un graphe MPM

Sur la base des conventions précédentes, la construction d'un graphe MPM ne pose pas de difficulté particulière, mais doit être réalisée avec méthode. La démarche la plus appropriée consiste à procéder par "niveau" :

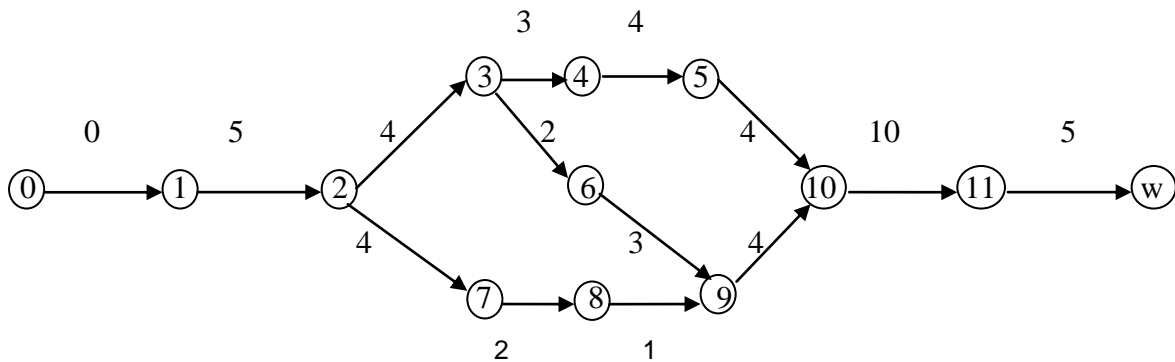
- déterminer les tâches sans antécédent (tâches de niveau 1) et les relier au sommet "Début"
- identifier ensuite les tâches de niveau 2, c'est-à-dire celles dont les antécédents sont exclusivement du niveau 1 et les positionner sur le graphique en les reliant à leurs antécédents,
- ... continuer ainsi, jusqu'à ce que toutes les tâches aient pu être positionnées entre elles et relier celles n'ayant pas de descendant au sommet "Fin".[39]

Nous avons le tableau suivant qui représente la construction d'un bâtiment dont les données sont disponibles ci-dessous :

N	Tache	Durée( Jours)	Prédécesseurs	Successeurs
1	Terrassement	5	-	2
2	Fondations	4	7	3,7
3	Colonnes porteuses	2	2	4,6
4	Charpente toiture	2	3	5
5	Couverture	3	4	10
6	Maçonnerie	5	3	9
7	Plomberie, electricit´	3	2	8
8	Coulage dalle b´eton	3	1	9
9	Chauffage	4	6,8	10
10	Plâtre	10	5,9	11
11	Finitions	5	10	-

**Tableau 2.2:** table d'ordonnancement des tâches

Alors nous obtenons le graphe suivant :



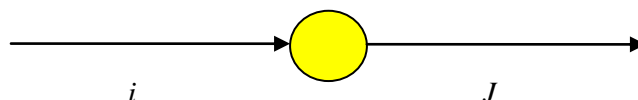
**Figure 2.2 :** Présentation graphique de la méthode du potentiel

### 5.1.3. Graphe de la méthode PERT

La méthode PERT (pour Program Evaluation Review Technique) s'est développée, parallèlement à la méthode des potentiels métra (méthode MPM), aux Etats-Unis en 1958 pour la planification de la construction des sous-marins Polaris. Elle se distingue de la méthode des potentiels par le fait que les tâches ne sont plus associées aux nœuds mais aux arcs du réseau.

L'algorithme de résolution est très semblable à celui de la méthode des potentiels. La différence majeure réside donc dans la construction du graphe : le graphe de la méthode PERT est souvent plus difficile à construire que celui de la méthode des potentiels car on peut être amené à introduire des arcs fictifs qui ne correspondent à aucune tâche.

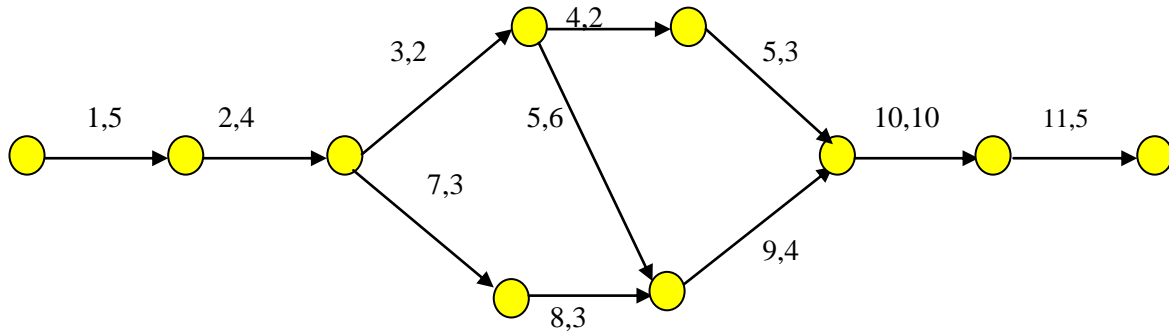
Dans la méthode PERT, chaque tâche est donc associée à un arc du graphe, la longueur de l'arc correspondant à la durée de la tâche en question. Les sommets sont utilisés pour traduire les relations de succession temporelle. Ainsi, si la tâche  $j$  doit suivre la tâche  $i$ , l'extrémité terminale de l'arc représentant la tâche  $i$  coïncidera avec l'extrémité initiale de l'arc représentant la tâche  $j$ .



**Figure 2.3** Une tâches

Comme nous avons vu dans l'exemple précédent dans la méthode des potentiel qui représente la construction d'un bâtiment :

Alors nous obtenons le graphe suivant :



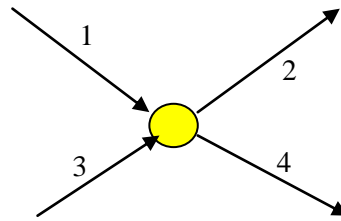
**Figure 2.4** graphe PERT

#### 5.1.3.1 Notion de tâche fictive

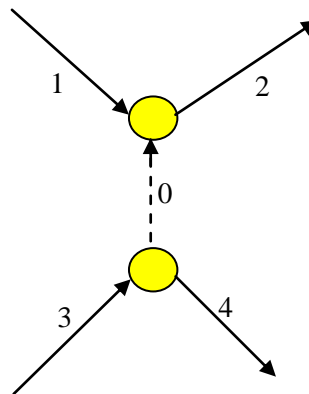
La construction du graphe PERT pose divers problèmes qui amènent à ajouter des arcs fictifs qui ne correspondent à aucune tâche. Un premier problème se rencontre lorsqu'on veut tenir compte des contraintes de localisation temporelle.

Par exemple, on suppose qu'une tâche  $i$  ne peut commencer avant une date  $li$ . Il faut introduire un arc joignant l'origine des travaux à l'origine de l'arc représentant la tâche  $i$  et ayant pour longueur la date en question  $li$ . On est donc amené, dans ce cas, à ajouter un arc fictif qui ne correspond à aucune tâche.

Un second problème plus délicat, se rencontre pour les contraintes de succession temporelle. En effet, supposons que la tâche 1 précède les tâches 2 et 3 et que la tâche 4 précède la tâche 3. On pourrait tracer le graphe ci-dessous mais ce graphe introduit une contrainte supplémentaire qui implique que la tâche 4 doit précéder la tâche 2. Pour résoudre ce problème, on ajoute un arc fictif de longueur nulle entre l'extrémité de la tâche 1 et le début de la tâche 3 : Il conviendra donc d'être vigilant dans la construction du graphe PERT. On remarquera également que le problème ne peut se produire que dans le cas où il y a au moins deux prédécesseurs et deux successeurs. Dans tous les autres cas, on peut construire le graphe sans ajouter d'arc fictif.[5]



**Figure 2.5** Contraintes de succession temporelle



**Figure 2.6** Tache fictif

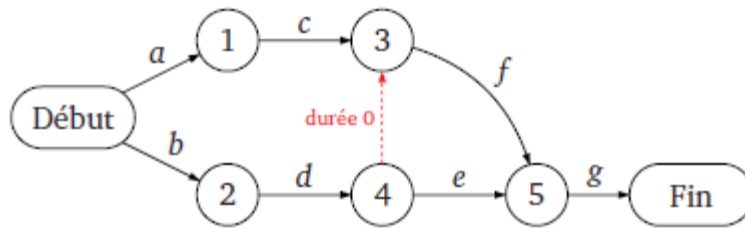
Comme nous avons mentionné une tâche fictive est une flèche en pointillé, indique seulement qu'il est nécessaire pour que une tâche soit entrepris, la tâche qui la précède doit être achevée. La tâche fictive est à une durée nulle et ne mettant en jeu aucun moyen matériel et financier.

D'autre exemple de la tâche fictive :[1]

Taches	prédécesseur
A	(aucune)
B	(aucune)
C	A
D	B
E	D
F	C, D
G	E , F

**Table 2.3** : exemple des tâches fictives.

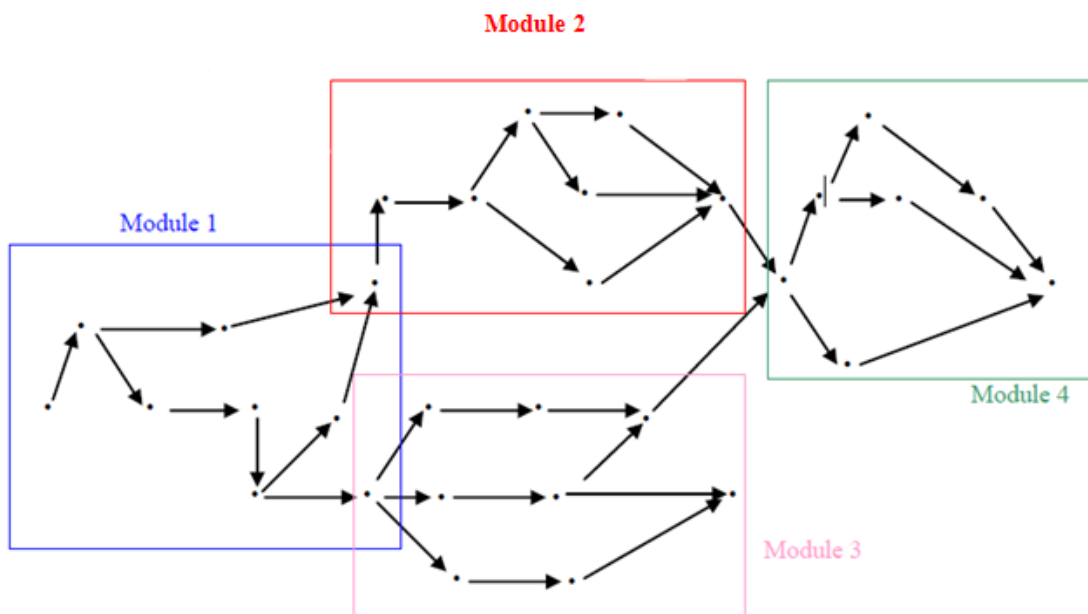
On obtient alors le graphe en figure



**Figure 2.7 :** Exemple de diagramme PERT avec des tâches virtuelles

#### 5.1.4 Modularité

Si le graphe PERT construit est trop important, on peut le décomposer en un certain nombre de modules. La méthode PERT est alors appliquée autant de fois qu'il y a de modules. Considérons l'exemple suivant :



**Figure2.8** La modularité dans le graphe PERT.

### 5.1.5 Comparaison

Nous venons de décrire la modélisation du problème central de l'ordonnancement par les graphes, et plus précisément par la méthode des potentiels et la méthode PERT.

Un inconvénient de cette dernière par rapport à la méthode des potentiels est de doubler initialement les sommets du graphe puisqu'on associe à chaque tâche une étape « début de tâche » et une étape « fin de tâche ».

Une autre difficulté apparaît, comme on l'a vu précédemment, il est souvent nécessaire d'introduire de nombreuses tâches fictives. De plus, à un même problème correspondent plusieurs graphes PERT plus ou moins simples. N'oublions pas qu'il y a une infinité de graphes PERT à cause des tâches fictives qu'on peut introduire comme on veut et là où on veut puisqu'elles ne nécessitent aucun moyen matériel ou financier qui influe sur la durée ou le coût global du projet.

Parmi les avantages de cette méthode est qu'elle est plus facilement lisible par les praticiens car une tâche est représentée par un arc et un seul. Donc, le nombre de tâches représente le nombre d'arcs réels.[20]

## 6 Résolution du problème central

Le graphe AoA présente une image claire des activités du projet et de leurs corrélations. Quand les durées sont imposées dans le réseau, les problèmes d'accomplissement des objectifs de l'ordonnancement deviennent évidents. Le chef de projet peut contrôler les tâches critiques et étudier l'effet du programme sur les charges de travail. Le PERT temps, dans ce contexte, est assurément un outil qui, appliqué avec vigueur et exactitude, représente une percée de gestion, de planification et de contrôle.

Le graphe AoA n'est pas une étape dans le processus de calcul du temps et du coût du projet. Il demeure un outil de base pour d'autres objectifs qui découlent de ce graphe. Pour calculer le délai le plus court pour la réalisation du projet, c'est-à-dire chercher le chemin de longueur maximale entre le début du projet ( $\alpha$ ) et sa fin ( $\omega$ ), Supposer que notre réseau de projet a  $n+1$  nœuds, l'événement initial étant 0 et le dernier événement étant  $n$ . Les tâches sont numérotées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivement. Le début du projet à  $x_0$  sera de durée 0 et sera également le temps de début des travaux. La date de début d'une tâche doit être plus grande que la date de début de la tâche précédente. Pour une activité définie comme à partir de l'événement  $i$  et fin à l'événement  $j$ , ce rapport peut être exprimé comme contrainte d'inégalité de la forme :



$$x_j - x_i = D_{ij} \text{ où } D_{ij} \text{ est la durée de l'activité } (i, j). \quad (1)$$

Cette même expression peut être écrite pour chaque activité et doit être vraie dans tout programme faisable. Mathématiquement, le problème d'établissement du programme du chemin critique est de réduire au minimum la période de l'accomplissement de projet ( $x_n$ ) sujet aux contraintes sus citées :

Minimiser

$$Z = x_n \quad (2)$$

Sujet à

$$x_0 = 0 \quad (3)$$

$$x_j - x_i = D_{ij} \text{ pour toute activité } (i, j) \quad (4)$$

Plutôt que de résoudre le problème d'établissement du programme de chemin critique avec un algorithme de programmation linéaire (tel que la méthode précédente), des techniques plus efficaces sont disponibles qui tirent profit de la structure de réseau du problème. Ces méthodes de solution sont très efficaces en ce qui concerne les calculs exigés, de sorte que des réseaux très grands puissent être traités sur ordinateur.[20]

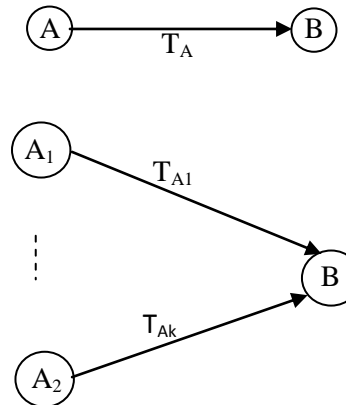
### 6.1 Dates et marges associées à une tâche

Il existe plusieurs relations utilisées dans le séquençage des tâches. Les plus utilisées sont :

➤ date de début au plus tôt :

Date à laquelle on peut commencer au plus tôt l'exécution d'une tâche compte tenu des dates de fin au plus tôt des tâches qui la précèdent. En notera comme DTO. [28]

- La date de début au plus tôt de la tâche  $\alpha$  est initialisée à 0.
- pour les autres tâches :
- . soit il y a un seul arc entre A et B



Alors :

$$\mathbf{DTO_B = DTO_A + t_A} \quad \text{Ou « ta » est la durée du tâche A}$$

Cas ou il ya K arcs ( $K > 2$ ) alors :

$$\mathbf{DTO_B = \max (DTO_{A1} + t_{A1}, \dots, DTO_{Ak} + t_{Ak})}$$

La détermination des dates au plus tôt des différentes sommets se fait donc par calculs successifs, à partir du sommet "Début" (dont, par convention, la date au plus tôt est fixée à 0).

➤ date de fin au plus tôt :

Date à laquelle on peut compléter au plus tôt l'exécution d'une tâche compte tenu des dates de fin au plus tôt des tâches qui la précèdent. En notera comme FTO [28]

Pour le calcul de la date de fin au plus tôt de la tâche A notée  $FTO_A$ , elle s'obtient aisément en ajoutant la durée de la tâche A à sa date de début au plus tôt :

$$\mathbf{FTO_A = DTO_A + t_A}$$

➤ date de début au plus tard :

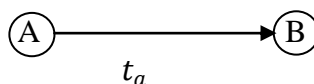
Date à laquelle il faut commencer au plus tard l'exécution d'une tâche pour qu'elle soit terminée dans les délais prévus. En notera comme :DTA [28]

- La date de début au plus tard de la tâche  $\omega$  est initialisée à sa date de début au plus tôt

$$\text{c.à.d : } \mathbf{DTA_{\omega} = DTO_{\omega} .}$$

- Pour les autres tâches :

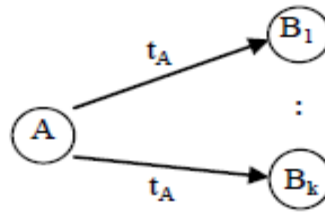
soit il y a un seul arc entre A et B pour calculer la date de début au plus tard :



$$\text{alors : } \mathbf{DTA_A = DTA_B - t_A}$$

Soit il y a plusieurs arcs qui sortent de A alors :

$$DTA_A = \min (DTA_{B_1}, ..., DTA_{B_k}) - t_A$$



**Figure 2.9** Calcul de  $da_A$  dans le cas d'un ou plusieurs arcs.

➤ date de fin au plus tard :

Date à laquelle il faut compléter au plus tard l'exécution d'une tâche pour que le projet dont elle fait partie soit terminé dans les délais prévus. En notera comme :FTA [28]

La date de fin au plus tard de la tâche A  $FTA_A$  s'obtient en ajoutant sa durée à sa date de début au plus tard :  $FTA_A = DTA_A + t_A$ .

➤ Marge totale :

La marge totale sur une tâche est le retard que l'on peut prendre dans sa réalisation sans retarder l'ensemble du projet et sous réserve que la tâche en question commence à sa date au plus tôt. Si l'on dépasse la marge totale d'une tâche, le projet prend du retard.[34]

Pour chaque tâche, on obtient l'intervalle de placement en faisant la différence entre la date de début au plus tard et la date de début au plus tôt de la même tâche.

$$MT_A = DTA_A - DTO_A$$

➤ Marge libre :

La marge libre sur une tâche est le retard que l'on peut prendre dans sa réalisation (sous réserve qu'elle ait commencé à sa date au plus tôt) sans retarder la date de début au plus tôt de toute autre tâche suivante. Si l'on dépasse la marge libre, certaines tâches suivantes sont retardées. Mais cela reste sans incidence sur la durée du projet.[34]

La marge libre d'une tâche A est la date de début au plus tôt minimum qui succèdent à A diminuée de sa date de fin au plus tôt.

$$ML_A = \min (DTO_{A_1}, DTO_{A_2}, ..., DTO_{A_k}) - FTO_A$$

Les tâches  $A_1, A_2, ..., A_k$  sont les tâches qui succèdent à A. [33]

**Nota :** on a toujours :  $0 \leq ML_A \leq MT_A$

➤ Chemin critique :

C'est le (ou les) chemin(s) critique(s) dont la durée est la plus longue entre le début ou la fin du réseau. Il est composé de tâches du réseau dont la marge totale est la plus faible. Il existe toujours au moins un chemin critique. La connaissance du chemin critique est fondamentale pour la gestion des délais.

Si toutes les marges des tâches du chemin critique ont une valeur nulle alors tout retard sur l'une de ces tâches implique un retard sur la fin du projet (si aucune action corrective n'est entreprise). Aussi ces tâches sont donc à surveiller en priorité.[8]

Plus généralement, toute tâche A du chemin critique P est telle que :  $DTA_A = DTO_A$ .

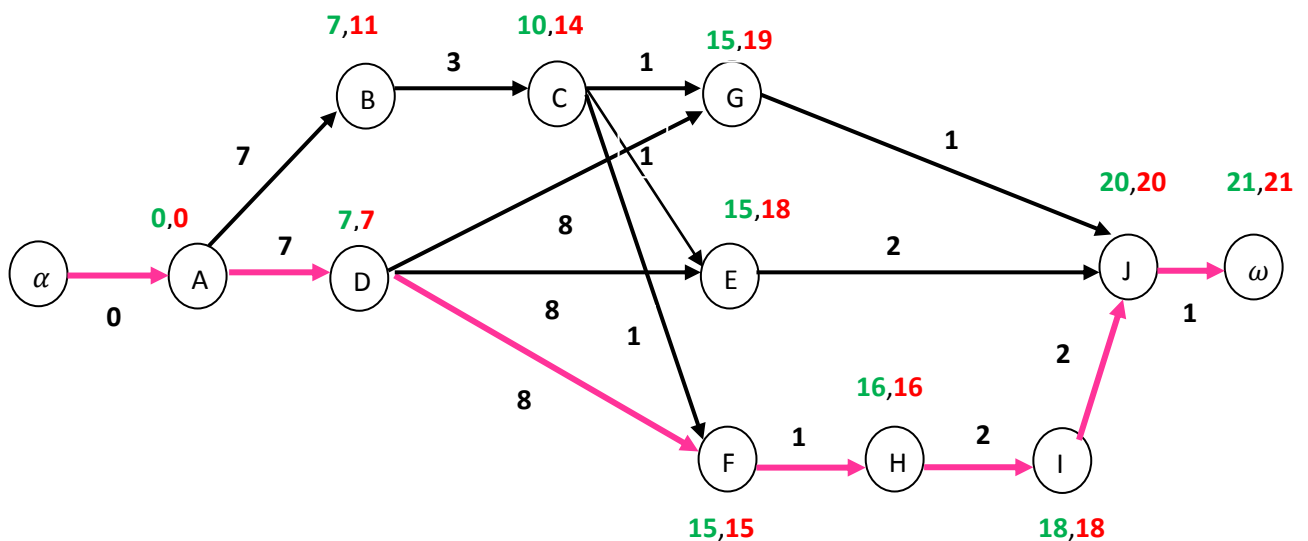
Prenons l'ordonnancement (**Table 2.6** Une table d'ordonnancement T) suivant et calculons les dates et les marges :

Tache	Désignation	Durée	Précédents
A	Maçonnerie	7	-
B	Charpente	3	A
C	Couverture	1	B
D	Plomberie électricité	8	A
E	Revêtements extérieurs	2	C, D
F	Menuiseries	1	C, D
G	Aménagement jardin	1	C, D
H	Plâtres	2	F
I	Peinture	2	H
J	Finitions	1	E, G, I

**Table 2.4** Une table d'ordonnancement T4

Calcul des dates de début au plus tôt	Calcul des dates de début au plus tard
Le calcul se fait dans l'ordre croissant des niveaux et les sommets d'un même niveau dans un ordre quelconque.	Le calcul se fait dans l'ordre décroissant des niveaux et les sommets d'un même niveau dans un ordre quelconque.
$do\alpha = 0$ $doA = do\alpha + 0 = 0$ $doB = doA + 7 = 7$ $doC = doB + 3 = 10$ $doD = doA + 7 = 7$ $doE = \text{Max}[doC + 1, doD + 8] = 15$ $doF = \text{Max}[doD + 8, doC + 1] = 15$ $doG = \text{Max}[doD + 8, doC + 1] = 15$ $doH = doF + 1 = 16$ $doI = doH + 2 = 18$ $doJ = \text{Max}[doG + 1, doE + 2, doI + 2] = 20$ $do\omega = doJ + 1 = 21$	$da\omega = do\omega = 21$ $daJ = do\omega - 1 = 20$ $daI = daJ - 2 = 18$ $daE = daJ - 2 = 18$ $daG = daJ - 1 = 19$ $daH = daI - 2 = 16$ $daF = daH - 1 = 15$ $daD = \text{Min}[daF, daG, daE] - 8 = 7$ $daC = \text{Min}[daF, daG, daE] - 1 = 14$ $daB = daC - 3 = 11$ $daA = \text{Min}[daD, daB] - 7 = 0$ $da\alpha = daA, - 0 = 0$

**Table 2.5** Dates de début au plus tôt et au plus tard  
du **table 2.4**



**Figure 2.10** Les dates de début au plus tôt et au plus tard dans le graphe AoN

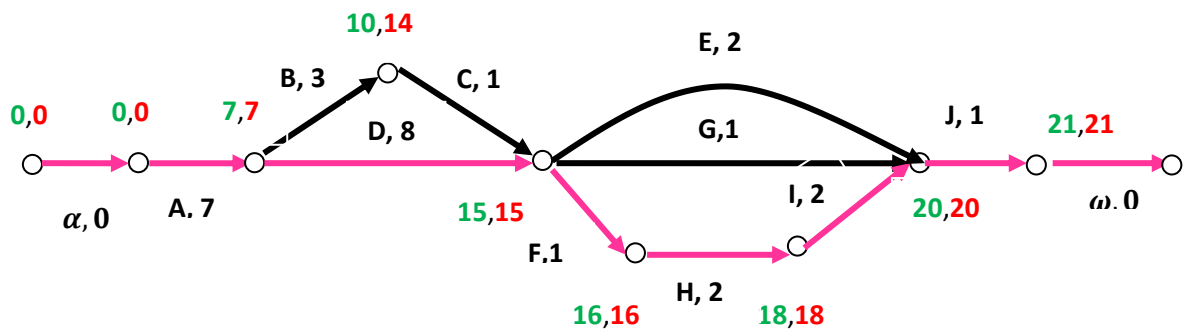


Figure 2.11 Les dates de début au plus tôt et au plus tard dans le graphe AoA

## 7 conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la gestion des projets avec ses différentes étapes. Ensuite nous avons vu l'ordonnancement dans le cycle de vie d'un projet.

Nous avons étudié les différentes techniques de modélisations des problèmes d'ordonnancement de projet.

L'objectif de l'ordonnancement central est non seulement d'organiser les activités dans le temps, mais également de permettre aux décideurs d'entreprises d'estimer les dates finales de livrables. Dès lors, l'ordonnancement de projet revêt un intérêt capital de par les estimations qu'il propose et qui servent de base à la prise de décision et à la coordination des ressources internes, des approvisionnements, des relations de sous-traitance et du suivi du projet.[20]